17　確率（1）

149

(1)

番号が 3 の倍数のカードは 26 枚あるから，$\dfrac{{}_{26}C_3}{{}_{80}C_3}=\dfrac{{}_{26}P_3}{{}_{80}P_3}=\dfrac{5}{158}$

(2)

番号が 3 の倍数のカードが少なくとも 1 枚含まれている確率を求めればよい。

番号が 3 の倍数のカードが 1 枚も含まれていない確率は $\dfrac{{}_{54}C_3}{{}_{80}C_3}=\dfrac{{}_{54}P_3}{{}_{80}P_3}=\dfrac{477}{1580}$ だから，

求める確率は $1-\dfrac{477}{1580}=\dfrac{1103}{1580}$

(3)

3 で割った余りが 0 の番号，1 の番号，2 の番号のカードの枚数はそれぞれ 26，28，26

余りの和が 3 の倍数であればよいから，余りの組合せは $(0,\ 0,\ 0),\ (1,\ 1,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2),\ (0,\ 1,\ 2)$

よって，求める確率は $\dfrac{{}_{26}C_3}{{}_{80}C_3}+\dfrac{{}_{28}C_3}{{}_{80}C_3}+\dfrac{{}_{26}C_3}{{}_{80}C_3}+\dfrac{{}_{26}C_1\cdot{}_{28}C_1\cdot{}_{26}C_1}{{}_{80}C_3}=\dfrac{527}{1580}$

150

(1)

AOD，BOE，COF の 3 つだから，$\dfrac{3}{{}_7C_3}=\dfrac{3}{35}$

(2)

三角形 OAB，OBC，OCD，ODE，OEF，OFA，ACE，BDF の 8 つだから，$\dfrac{8}{{}_7C_3}=\dfrac{8}{35}$

(3)

直角三角形 ABE およびそれと合同な三角形の面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

正三角形 ACE およびそれと合同な三角形の面積は $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ で条件を満たす。

直角三角形 ABE およびそれと合同な三角形は，1 斜辺（直径）につき 4 つあるから，

全部で $3\cdot 4=12$ 個

正三角形 ACE およびそれと合同な三角形は全部で 2 個

よって，求める確率は $\dfrac{12+2}{{}_7C_3}=\dfrac{2}{5}$

151

取り出した玉の順列の総数は 9!

取り出された順と玉の番号が一致する組合せの数は ${}_9\mathrm{C}_5$ で，たとえば，番号が 1,2,3,4,5 の玉が，それらが取り出された順と一致したとすると，番号が 6,7,8,9 の玉が取り出される順は下表の 9 通り。

よって，求める確率は，$\dfrac{{}_9\mathrm{C}_5 \cdot 9}{9!} = \dfrac{1}{320}$

6 番目	7 番目	8 番目	9 番目
7	6	9	8
7	8	9	6
7	9	6	8
8	6	9	7
8	9	6	7
8	9	7	6
9	6	7	8
9	8	6	7
9	8	7	6

152

(1)

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_1 \cdot {}_n\mathrm{C}_2}{{}_{n+6}\mathrm{C}_3} = \frac{18n(n-1)}{(n+6)(n+5)(n+4)}$$

(2)

$P_n > P_{n+1}$ より，$\dfrac{P_n}{P_{n+1}} > 1$ すなわち $\dfrac{18n(n-1)}{(n+6)(n+5)(n+4)} \cdot \dfrac{(n+7)(n+6)(n+5)}{18(n+1)n} > 1$

$\therefore \dfrac{(n-1)(n+7)}{(n+4)(n+1)} > 1$

両辺に $(n+4)(n+1)$ を掛け，整理すると，$n > 11$ $(\because (n+4)(n+1) > 0)$

よって，求める n の値は 12

(3)

(2)より，$n = 11$ のとき $P_n = P_{n+1}$　すなわち $P_{11} = P_{12}$

$n > 11$ のとき $P_n > P_{n+1}$，$n < 11$ のとき $P_n < P_{n+1}$

よって，$P_1 < P_2 < \cdots < P_{11} = P_{12} > P_{13} > P_{14} > \cdots$

ゆえに，P_n を最大にする n の値は 11 と 12

153

解法 1

サイコロをすべて区別すると，

目の出方の総数は6^n

出た目の和が$n+3$になるのは

（2 の目のサイコロが 3 個，1 の目のサイコロが$n-3$個）

（3 の目のサイコロが 1 個，2 の目のサイコロが 1 個，1 の目のサイコロが$n-2$個）

（4 の目のサイコロが 1 個，1 の目のサイコロが$n-1$個）

よって，求める確率は$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_3+{}_n\mathrm{C}_1\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_1}{6^n}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6^{n+1}}$

解法 2

サイコロをすべて区別すると，

目の出方の総数は6^n

サイコロの最小の目は 1 だから，出た目の和が$n+3$になる場合の数は

異なるn個のものから重複を許して 3 個とる場合の数と等しい。

よって，${}_n\mathrm{H}_3={}_{n+3-1}\mathrm{C}_3=\dfrac{(n+2)(n+1)n}{6}$

ゆえに，求める確率は$\dfrac{\frac{(n+2)(n+1)n}{6}}{6^n}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6^{n+1}}$

補足 1

異なるn個から 1 個ずつ計n個取り出す。（1 通り）

↓

異なるn個から重複を許して 3 個取り出す。（${}_n\mathrm{H}_3$通り）

より，$1\cdot{}_n\mathrm{H}_3={}_{n+3-1}\mathrm{C}_3=\dfrac{(n+2)(n+1)n}{6}$通り

補足 2

同じ$n+3$個のものをn人に，どの 1 人も 1 個配られるよう，配る場合の数と等しい。

あらかじめ 1 個ずつn人に配り，残りの 3 個を分けるとすれば，

同じ 3 個とn人を区別する$n-1$個の仕切りの順列の数または$3+(n-1)=n+2$ヶ所から

3 ヶ所を選ぶ場合の数より，${}_{n+2}\mathrm{C}_3=\dfrac{(n+2)(n+1)n}{6}$

あるいは，$n+3$個の間，すなわち$n+2$個のスペースから$n-1$ヶ所を選んで仕切りを入れるとすれば，${}_{n+2}\mathrm{C}_{n-1}=\dfrac{(n+2)(n+1)n}{6}$

154

(1)

余事象の確率は$\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$だから，$1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

または，

目の出方は全部で6^n通り

このうち2以上の目の出方は5^n通りだから，

出る目の最小値が1となる目の出方は6^n-5^n通り。

よって，求める確率は$\dfrac{6^n-5^n}{6^n}$

(2)

目の出方は全部で6^n通り

2以上の目の出方は5^n通りあり，これには3以上の目の出方（4^n通り）が含まれるから，

出る目の最小値が2となる目の出方は5^n-4^n通り

よって，求める確率は$\dfrac{5^n-4^n}{6^n}$

(3)

出る目がすべて2以上5以下となる異なるn個のサイコロの目の組合せの集合をU

Uの部分集合で，目の最小値が2となる目の組合せの集合をA，目の最大値が5となる目の組合せの集合をBとすると，目の最小値が2で最大値が5となる目の組合せの集合は$A\cap B$

よって，

$$\begin{aligned}n(A\cap B)&=n(U)-n\left(\overline{A\cap B}\right)\\&=n(U)-n\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\\&=n(U)-\left\{n\left(\overline{A}\right)+n\left(\overline{B}\right)-n\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\right\}\\&=4^n-\left(3^n+3^n-2^n\right)\\&=4^n-2\cdot3^n+2^n\end{aligned}$$

これと，目の出方は全部で6^n通りあることから，

求める確率は$\dfrac{4^n-2\cdot3^n+2^n}{6^n}$

補足

$\overline{A}$：出る目が3～5となる目の組合せの集合

$\overline{B}$：出る目が2～4となる目の組合せの集合

155

(1)

B がグーで勝つ確率＝A がチョキを出す確率＝$\frac{1}{3}$

B がチョキで勝つ確率＝A がパーを出す確率＝$\frac{1}{6}$

B がパーで勝つ確＝A がグーを出す確率＝$\frac{1}{2}$

よって，パーを出せばよい。また，そのときの勝つ確率は$\frac{1}{2}$

(2)

勝つ確率＝1 回目に勝つ確率＋1 回目にあいこになる確率×2 回目に勝つ確率
ここで，1 回で勝つ確率が最も高いのはパーを出すときだから，
1 回目にあいこになった場合は 2 回目にパーを出せばよい。
そこで，（1 回目の手，2 回目の手）が（グー，パー），（チョキ，パー），（パー，パー）の場合について、それぞれの勝つ確率を調べると，

（グー，パー）のとき：$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{12}$

（チョキ，パー）のとき：$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

（パー，パー）のとき：$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{12}$

よって，
（1 回目の手，2 回目の手）を（グー，パー）または（パー，パー）とする作戦をとると，
勝つ確率が$\frac{7}{12}$となり最も高い。

(3)

勝つ確率＝1 回めに勝つ確率＋1 回目にあいこになる確率×2 回以内に勝つ確率
2 回以内に勝つ確率は，(2)より，（グー，パー）または（パー，パー）のとき最も高いから，
1 回目にあいこになった場合の 2 回目，3 回目の手は（グー，パー）または（パー，パー）にすればよい。
この場合，勝つ確率は

1 回目がグーのとき：$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{12}=\frac{5}{8}$

1 回目がチョキのとき：$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{12}=\frac{13}{36}$

1 回目がパーのとき：$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{7}{12}=\frac{43}{72}$

よって，1 回目がグーで 2 回目，3 回目は（グー，パー）または（パー，パー），
すなわち（1 回目の手，2 回目の手，3 回目の手）を（グー，グー，パー）または（グー，パー，パー）とする作戦をとると，勝つ確率が $\frac{5}{8}$ となり最も高い。